تحليل 4 :

م1

الفضاءات المتجهة والفضاءات التآلفية :

تعريف :

لتكن V مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية نسميها جمعاً [1] وبعملية خارجية نسميها ضرباً [2] في عدد حقيقي

$V \times V \longrightarrow V$ ، $(x, y) \longrightarrow x + y$

$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ ، $(a, x) \longrightarrow a x$

★ نقول عن V أنها فضاء متجه فوق $\mathbb{R}$ إذا تحققت الشروط التالية :

1. الخاصية التجميعية $x + (y + z) = (x + y) + z$ ؛ $\forall x, y, z \in V$
2. يوجد في V العنصر الحيادي وهو الصفر $\forall x \in V ; x + 0 = 0 + x = x$
3. يوجد لكل عنصر x في V نظيره هو $-x$ بحيث يكون $x + (-x) = -x + x = 0$
4. $\forall x, y \in V$ فإن $x + y = y + x$ الجمع تبديلي.
   أي أن V هي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع.
5. $\forall x, y \in V$ ، $\forall a \in \mathbb{R}$ فإن $a(x + y) = a x + a y$
6. $\forall x \in V$ ، $\forall a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a + b) x = a x + b x$
7. $\forall x \in V$ ، $\forall a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a b) x = a (b x)$
8. $\forall x \in V$ فإن $1 x = x$

أمثلة :

1. $\mathbb{R}$ فضاء متجه فوق نفسه.
2. إذا عرفنا على الجداء الديكارتي $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots n \}$
   عملية الجمع والضرب بعدد حقيقي كما يلي :
   $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
   $a (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a x_1, a x_2, \ldots, a x_n)$.
   يمكن التحقق بسهولة أن $\mathbb{R}^n$ هو فضاء متجه.
3. لتكن X مجموعة ما ونرمز بـ $B(X, \mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال الحقيقية [دالة حقيقية أي

/ /

منطلقها X ومستقرها R] لمجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على X منطلقا إذا عرفنا
مجموع دالتين f و g من $B(X,R)$ بالشكل: $f: X \to R$; $g: X \to R$

$f+g: X \to R$, $x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

وحاصل ضرب دالة f بعدد حقيقي a ; $a.f: X \to R$,

$x \to (af)(x) = a.f(x)$

مجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على X

ويمكن التحقق من أن $B(X,R)$ فضاء متجهي حقيقي

ونلاحظ هنا أن [العنصر الحيادي هو الدالة الصفرية] وأن [نظير العنصر f هو الدالة $-f$]

$O: X \to R$, $O: x \to 0$; $\forall x \in X$ دالة صفرية

المعرفة بالشكل التالي: $-f: X \to R$; $x \to (-f)(x) = -f(x)$

نتائج: 1- أياً كان $x \in V$ وأياً كان $a \in R$ فإن:

$aX = 0 \in V \Rightarrow$ إما $a = 0 \in R$ أو $X = 0 \in V$

2- أياً كان $x, y \in V$ ، وأياً كان $a, b \in R$ فإن:

$a(x-y) = ax - ay \to$ عملية في V

$(a-b)x = ax - bx \to$ عملية في R

تعريف الفضاء الجزئي: ليكن V فضاء متجهي حقيقي ، و F مجموعة جزئية حقيقية من V ونقول عن F إنه فضاء متجهي جزئي من V إذا تحقق الشرطان التاليان:

1- $\forall x, y \in F$, $x+y \in F$

2- $\forall x \in F$; $\forall a \in R$, $ax \in F$

تعاريف:

1- لتكن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من الفضاء المتجهي V نقول عن المتجهات S إنها مرتبطة خطياً إذا وجدت اعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ليست كلها معدومة بحيث يكون $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \neq 0$ ونقول عن متجهات S إنها مستقلة خطياً إذا لم تكن مرتبطة خطياً [تكون مستقلة عندما تكون الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_m$ جميعها أصفار].

أي إذا وفقط إذا كان $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n;\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0 \Rightarrow$
$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$

2- إذا كانت A مجموعة جزئية من V فنقول عن متجهات A إنها مستقلة خطياً إذا كان متجهات أي مجموعة جزئية منتهية من A مستقلة خطياً. نقول عن المجموعة الكبيرة انها مرتبطة إذا كانت مجموعة جزئية منتهية فيها مرتبطة.

الفرق بين 1 و 2 — 1 مجموعة منتهية — 2 مجموعة غير منتهية

3- إذا كان V فضاء حقيقي ; x و y عنصرين ما من V فإننا نقول عن المجموعة :
$M = \{ z \in V,\ z = x + t(y - x);\ 0 \le t \le 1 \}$
إنها قطعة مستقيمة مغلقة طرفاها x و y ونرمز لها بـ $\{x, y\}$

4- لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتجه الحقيقي V نقول عن A إنها مجموعة محدبة إذا كانت كل قطعة مستقيمة مغلقة طرفاها من A محتواة في A

مجموعة محدبة — غير محدبة

أمثلة : 1- المتجهات $(1,0,0)$; $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ متجهات من R^3 مستقلة خطياً
$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a,b,c) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = c = 0$

2- إذا رمزنا بـ $F(R,R)$ لفضاء الدوال الحقيقية المعرفة على R فإن الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين بالشكل التالي:
$f_1 : R \to R,\ x \to f_1(x) = x + 1$
$f_2 : R \to R;\ x \to f_2(x) = x - 1$
وهما مستقلين خطياً ; بينما الدالتين :
$h_1 : R \to R;\ x \to h_1(x) = x + 1$
$h_2 : R \to R;\ x \to h_2(x) = 2x + 2$
وهما مرتبطتين خطياً

3- المجموعات المحدبة في R هي مجالات.

/ /

تعاريف: 1- لتكن x_m ـــــ x_1, x_2 متجهات من V ندعو كل متجه من الشكل:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = \sum_{k=1}^{m} a_k . x_k \; ; \; a_k \in R$$

تركيبا خطيا بالمتجهات $x_1, x_2, \cdots x_m$.

2- لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتجه V نقول عن A إنها تولد V إذا كان كل عنصر من V هو تركيب خطي منته من عناصره A.

مهمة 3- نقول عن الفضاء المتجه V إنه ذو بعد منته إذا وجدت مجموعة جزئية منتهية من V تولد V.

4- لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتجه V نقول عن A إنها قاعدة أو أساس لـ V: إذا كانت متجهاتها مستقلة خطياً وتولد V.

- وإذا كانت V ذو بعد منته وعدد عناصر A هو n فنقول أن V ذو بعد n ونكتب قانون $\dim V = n$ " بعد V يساوي n " أي أن مجموعة المولدات تساوي n.

5- لتكن V تساوي $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ قاعدة للفضاء المتجه V ذو البعد n عندئذ أياً كان المتجه $x \in V$ فإنه يوجد مركبة n وحيدة وهي $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R$ بحيث يكون $x = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot e_k$.

أي أن البعد عدد عناصر القاعدة.

أمثلة: 1- المرتبات n

$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ و $e_2 (0, 1, 0, 0, \cdots, 0)$ ــــ

$e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$

والتي عددها n تشكل قاعدة للفضاء R^n نسميها القاعدة القانونية وإذا كانت $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ مرتبة من R^n فإن $x = x_1 e_1 + x_2 . e_2 + \cdots + x_n . e_n$ وبالتالي $x_1, x_2, \cdots, x_n$ هي مركبات x بالنسبة للقاعدة القانونية ونستنتج أن:

$\dim R^n = n$ " عدد عناصر القاعدة هو عدد عناصره غير منتهية "

/ /

2- الفضاء $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ليست ذا بعد منتهي .

تعريف الفضاء التآلفي :

ليكن V فضاء متجهي و A مجموعة ما , نقول عن A أنه فضاء تآلفي فوق V إذا تحقق ما يلي :

★ يوجد تطبيق $A\times V \longrightarrow A$; $(x,u) \longrightarrow x+u$ أو $u+x$ ويحقق المساواة :

$v+(u+x)=(v+u)+x$; $\forall v,u\in V$; $x\in A$

★ يوجد تطبيق $A\times A \longrightarrow A$; $(x,y) \longrightarrow y-x$ ويحقق المساواة :

$(y-x)+x=y$; $\forall x,y\in A$

ونقول عندئذٍ إن V هو الفضاء المشارك لـ A .

ملاحظات :

1- يمكن أن نكتب $v+u+x$ بدلاً من $(u+v)+x$ أي يمكن أن نلغي الأقواس

2- إذا كان u متجهاً من V فإن التطبيق $A\to A$; $x \longrightarrow x+u$ هو انسحاب متجهه u .

3- نسمي عناصر A عادة بالنقاط .

4- نرمز عادةً للمتجه $y-x$ بالرمز $\vec{xy}$ ونقول عن النقطة x إنه بداية المتجه و y نهايتها .

نتيجة : يمكن أن نعتبر أن كل فضاء متجهي V إنه فضاء تآلفي فوق نفسه و نقول عن هذا الفضاء انه الفضاء المشارك لـ V .

تعريف : ليكن A فضاء تآلفياً فوق الفضاء المتجهي V ذي البعد n ولتكن o نقطة ما من A و $B=\{e_1,e_2,\ldots\ldots,e_n\}$ قاعدة لـ V إذا كانت M نقطة ما

من A فتوجد اعداد حقيقية $x_1, x_2, \ldots x_n$ بحيث يكون:

$$\overrightarrow{OM} = x_1 . e_1 + x_2 . e_2 + \ldots + x_n . e_n$$

ندعو الأعداد $x_1, x_2, \ldots x_n$ إحداثيات النقطة M نحو النظام الإحداثي ذو المبدأ O والقاعدة B كما ندعو OM متجه الموضع للنقطة M.